

DER KRITISCHE FALL O IN DER HEAWOODSCHEN VERMUTUNG

Inaugural-Dissertation
zur

Erlangung der Doktorwürde
des

Fachbereichs Mathematik
der

Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Heidi Mahnke
aus Prag

1971

DER KRITISCHE FALL O IN DER HEAWOODSCHEN VERMUTUNG

Inaugural-Dissertation
zur

Erlangung der Doktorwürde

des

Fachbereichs Mathematik

der

Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Heidi Mahnke

aus Prag

1. Gutachter: Prof. Dr. Gerhard Ringel
2. Gutachter: Prof. Dr. Karl-Peter Grottemeyer

Tag der mündlichen Prüfung: 2. September 1971

Tag der Promotion:



I N H A L T S V E R Z E I C H N I S

	Seite
§ 1 Problemstellung	1
§ 2 Graphentheoretische Formulierung des Problems	2
§ 3 Beispiele	6
§ 4 Vorbemerkungen zur allgemeinen Lösung	13
§ 5 Allgemeine Lösung	16
§ 6 Notwendigkeit nicht kommutativer Gruppen	28
Zusammenfassung	35
Literaturverzeichnis	36



Digitized by the Internet Archive
in 2026

§ 1. Problemstellung

Diese Arbeit befaßt sich mit einem Teil der Heawoodschen Vermutung, wobei das Problem in dualer Form mit Mitteln der Graphentheorie behandelt wird.

In der Heawoodschen Vermutung wird ausgesagt, daß für jede geschlossene orientierbare Fläche F_p vom Geschlecht p ($p > 0$) die chromatische Zahl

$$(1) \quad \chi_p = \left\lceil \frac{7 + \sqrt{1+48p}}{2} \right\rceil \quad p > 0$$

ist. (Für $x \in \mathbb{R}$ sei $[x]$ die größte ganze Zahl, die nicht größer als x ist.)

Dabei versteht man unter der chromatischen Zahl das Minimum aller Zahlen x mit der Eigenschaft: Mit x Farben kann man jede (zulässige) Landkarte auf F_p so färben, daß benachbarte Länder verschiedene Farben haben.

Heawood hat eine Teilaussage von (1) bewiesen. (Für den Klammerausdruck in (1) wird abkürzend $H(p)$ geschrieben.)

$$(2) \quad \chi_p \leq H(p) \quad p > 0$$

Der folgende Ansatz führt zum Beweis der Ungleichung in der anderen Richtung.

Unter der Maximalzahl ν_p der Nachbargebiete auf F_p versteht man das Maximum aller Zahlen x mit der Eigenschaft, daß es eine Zerlegung von F_p in x paarweise benachbarte Flächenstücke gibt. Bei einer solchen Zerlegung muß jedes Flächenstück eine eigene Farbe bekommen, daher gilt für jede Fläche F_p

$$(3) \quad \nu_p \leq \chi_p$$

(Diese Aussage gilt auch für $p = 0$, hier wird aber nur $p > 0$ behandelt.)

Wenn man für eine vorgegebene Geschlechtzahl p eine Methode angeben könnte, mit deren Hilfe jede Fläche F_p in $H(p)$ paarweise benachbarte Länder zerlegt werden kann, dann würde für dieses p

$$\nu_p \geq H(p)$$

gelten. Insgesamt wäre für diesen p -Wert die Heawoodsche Vermutung vollständig bewiesen.

Die gewünschte Zerlegung von F_p würde man erhalten, wenn man von einer Dreieckseinbettung des vollständigen Graphen $K_{H(p)}$ in F_p ausgehen könnte. Der dazu duale Graph würde F_p in $H(p)$ paarweise benachbarte $(H(p) - 1)$ -Ecke zerlegen.

Die Existenz einer Dreieckseinbettung eines vollständigen Graphen K_n kann aber nur dann erwartet werden, wenn diese mit der Eulerschen Formel vereinbar ist. Setzt man die Existenz voraus, so gilt für die Knoten-, Kanten- und Flächenstückanzahl ($n > 4$) :

$$\alpha_0 = n, \quad \alpha_1 = \frac{n(n-1)}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{2\alpha_1}{3} = \frac{n(n-1)}{3}$$

Die Fläche hat wegen der Eulerschen Polyederformel

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 2 - 2p$$

das Geschlecht

$$(4) \quad p = 1 - 1/2(\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2) = \frac{(n-3)(n-4)}{12}$$

Da p eine ganze Zahl ist, bedeutet Gleichung (4) nur dann keinen Widerspruch, wenn $(n-3)(n-4) \equiv 0 \pmod{12}$ gilt. Es ist also eine notwendige Bedingung, daß für n eine der Kongruenzen $n \equiv 0, 3, 4$ oder $7 \pmod{12}$ besteht.

Bei diesen sogenannten regulären Fällen gibt es tatsächlich Dreieckseinbettungen von K_n . In dieser Arbeit wird das für alle $n \equiv 0 \pmod{12}$ (Fall 0) bewiesen.

§ 2. Graphentheoretische Formulierung des Problems

Für alle $n \equiv 0 \pmod{12}$ wird eine Dreieckseinbettung von K_n gebraucht, hier aber nicht direkt angegeben. Vielmehr wird ihre Existenz durch Satz 1 gesichert (vergl. auch Youngs [15], S. 340).

Darin kommt als zentraler Begriff ein bewerteter Graph mit bestimmten zusätzlichen Eigenschaften vor. Er schließt formulierungsmäßig nicht an die Dreieckseinbettung, sondern an die $H(p)$ ($H(p)-1$)-Ecke an. Anschaulich gesprochen wird jedes Land nach einem Element einer geeigneten Gruppe benannt. Der Graph dient dann dazu, die Aufeinanderfolge der Nachbarländer des Landes "e" (Einheitselement) zu bestimmen, und zwar ist die Reihenfolge durch die Zirkulation auf dem Graphen gegeben.

Es wird hier eine sogenannte Index 1-Lösung angegeben. Dies besagt, daß sich die Aufeinanderfolge der Nachbarländer eines beliebigen Landes "x" aus der obigen durch Multiplikation mit x ergibt. Index 1-Lösungen sind also deshalb so wünschenswert, weil es bei ihnen genügt, einen einzigen Zyklus zu kennen. In der Sprache der Schemata heißt das, daß man nur die erste Zeile zu kennen braucht.

Für den Satz werden einige Definitionen gebraucht (vergl. Youngs [15]). $S = S(G)$ heißt ein bewerteter Graph, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind :

S ist ein gerichteter Graph, der auch Schlingen enthalten kann. Kommt in ihm die gerichtete Kante (a,b) vor, dann kommt auch die entgegengesetzte Kante (b,a) vor.

G ist eine endliche Gruppe mit dem neutralen Element e . (Im Folgenden werden Gruppen immer multiplikativ geschrieben.)

Jeder gerichteten Kante (a,b) von S ist ein Element $\lambda(a,b) \in G \setminus \{e\}$ als Bewertung derart zugeordnet, daß gilt

$$\lambda(a,b) \lambda(b,a) = e .$$

S sei ein endlicher gerichteter Graph, a ein Knoten von S . Eine Rotation r von a ist eine zyklische Permutation aller gerichteten Kanten, deren Anfangspunkt a ist. Eine Rotation auf S erhält man, wenn für jeden Knoten eine Rotation erklärt ist.

Wenn auf S eine Rotation definiert ist, gibt es geschlossene Wege der folgenden Art : Man beginne mit einer beliebigen Kante k . k^{-1} bezeichne die entgegengesetzte Kante.

$$k , r(k^{-1}) , r(r(k^{-1})^{-1}) , \dots$$

Dabei ist der Endpunkt einer Kante gleich dem Anfangspunkt der nächsten. Nach endlich vielen Schritten erhält man wieder k , und der Prozeß wiederholt sich. Die zyklische Permutation der Kanten wird Zirkulation genannt.

Unter einer Dreieckseinbettung eines Graphen S in eine Fläche F versteht man eine Einbettung derart, daß $F \setminus S$ aus paarweise disjunkten Dreiecken besteht.

Satz 1 :

Jeder bewertete Graph $S = S(G)$, der die folgenden Forderungen erfüllt, bestimmt eine Dreieckseinbettung des vollständigen Graphen K_n ($n \geq 4$).

- 1.) G ist eine endliche Gruppe von n Elementen mit der Einheit e .
- 2.) S ist ein bewerteter Graph mit Bewertungen aus $G \setminus \{e\}$.
- 3.) Jeder Eckpunkt von S hat den Grad 1 oder 3.
- 4.) Auf S ist eine Rotation gegeben, die genau eine Zirkulation induziert.
- 5.) Jedes Element von $G \setminus \{e\}$ kommt genau einmal als Bewertung auf einer gerichteten Kante des Graphen vor.
- 6.) Jedes Element von G , das die Ordnung 2 hat, tritt als Bewertung einer Schlinge auf.
- 7.) Ist der Anfangspunkt einer gerichteten Kante vom Grad 1, so hat ihre Bewertung die Ordnung 3 in G .
- 8.) An jedem Eckpunkt vom Grad 3 gilt das Kirchhoffsche Gesetz.

Das Kirchhoffsche Gesetz (KG) besagt, daß das Produkt der Bewertungen, die eine Ecke verlassen, die Einheit e ergibt; die Rotation legt die Reihenfolge der Faktoren fest.

Beweis des Satzes :

Sei S ein Graph und G eine Gruppe, die die Eigenschaften 1.) bis 8.) haben. Gesucht ist ein orientierbares Schema, für das die Dreiecksregel Δ^* gilt.

Δ^* : Für alle i, a, b gilt : $i : \dots a b \dots \Rightarrow b : \dots i a \dots$

Δ^* ist zur Regel R^* (s. Ringel [8]) äquivalent, wie man durch zweimaliges Anwenden von Δ^* zeigen kann.

Die einzige Zirkulation auf dem Graphen ergibt eine zyklische Permutation $(a_1 \dots a_{n-1})$ von $G \setminus \{e\}$.

Das Schema sei dann so definiert :

$$e : \quad a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_{n-1}$$

$$a_i : \quad a_i a_1 \quad a_i a_2 \quad \dots \quad a_i a_{n-1} \quad \text{für jedes } i = 1, 2, \dots, n-1$$

Dann steht in der i -ten Zeile eine Permutation von $G \setminus \{a_i\}$. Das Schema bestimmt ein Polyeder aus n $(n-1)$ -Ecken, die paarweise eine Kante gemeinsam haben. Es enthält nur dreikantige Ecken, da die Regel Δ^* gilt, d.h. es gibt eine Dreieckseinbettung von K_n in die Fläche.

Nachweis von Δ^* :

Da das Schema zyklisch ist, braucht Δ^* nur für die erste Zeile bewiesen zu werden.

Fall 1 $b^2 = e$

e: ... a b c ... $\Rightarrow$ b: ... b a e b c ...

b tritt als Bewertung auf einer Schlinge auf. Die Skizze zeigt einen Ausschnitt des Graphen. (Ein ausgefüllter Punkt gibt eine Rotation im Uhrzeigersinn an.)

KG : $a^{-1} b c = e \Rightarrow a = b c \Rightarrow$

b: ... e a ...



Fall 2 $b^2 \neq e$

Fall 2.1 b endet in einem Knoten 1. Grades.

e: ... a b b⁻¹ c ...

b: ... b a b² e b c ...

KG : $a = b c \Rightarrow$

b: ... e a ...



Fall 2.2 b geht von einem Knoten 1. Grades aus.

e: ... a b b⁻¹ b c ...

b: ... b a e b² b c ...

Nach 7.) gilt $b^3 = e \Rightarrow$

b: ... e b⁻¹ ...



Fall 2.3 b und b⁻¹ enden nicht in einem Knoten 1. Grades.

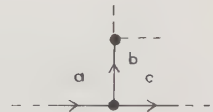
Wegen 3.) ist der Knoten vom Grad 3, c ist verschieden von a⁻¹, und es gilt das Kirchhoffsche Gesetz.

e: ... a b ... b⁻¹ c ...

b: ... b a b² ... e b c ...

KG : $a = b c \Rightarrow$

b: ... e a ...



Damit ist der Beweis geführt. Es fällt auf, daß die Regel Δ^* für das Schema eine entsprechende Bedeutung hat wie das Kirchhoffsche Gesetz für den Graphen.

Die Aufgabe besteht also darin, eine Methode anzugeben, mit der man für jedes $n \equiv 0 \pmod{12}$ eine Gruppe mit n Elementen und einen dazu passenden bewerteten Graphen mit den Eigenschaften 1.) bis 8.) konstruieren kann.

§ 3. Beispiele

Bevor der allgemeine Fall mit $n = 12$ für eine beliebige natürliche Zahl s behandelt wird, werden für einige kleine Werte von s geeignete Graphen angegeben.

3.1. Lösung für $n = 12$

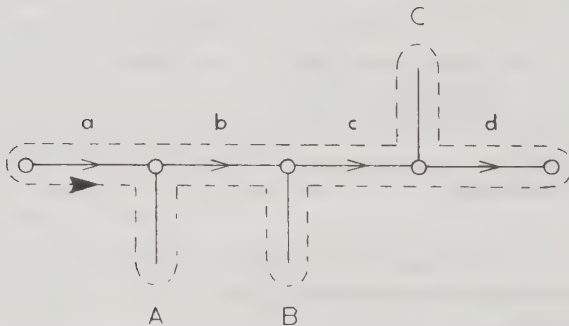
In den regulären Fällen 4 und 7 sind Index 1-Lösungen mit abelschen Gruppen angegeben worden. In §6 wird gezeigt, daß dies für den Fall 0 nicht möglich ist.

Bei $n = 12$ wird die (nicht kommutative) alternierende Gruppe der Ordnung 4 (A_4) zugrunde gelegt. Die Elemente von A_4 werden gemäß (5) bezeichnet.

$$(5) \quad a = (123) \quad b = (134) \quad c = (142) \quad d = (243) \\ A = (12)(34) \quad B = (13)(24) \quad C = (14)(23) \quad e = \text{Identität}$$

Abb. 1 gibt den bewerteten Graphen $S(A_4)$ an. Seine Form ist durch die Zahl 12 nahezu eindeutig festgelegt.

Abb. 1



Dabei soll ein Eckpunkt, der durch einen kleinen Kreis ($\circ$) dargestellt ist, eine Rotation entgegen dem Uhrzeigersinn haben.

Die Zirkulation, die von der Rotation induziert wird, ist gestrichelt gezeichnet. Da

$$A_4 = \{e, A, B, C, a, b, c, d, a^{-1}, b^{-1}, c^{-1}, d^{-1}\}$$

gilt, kommen alle Elemente von $A_4 \setminus \{e\}$ genau einmal vor. An (5) kann man ablesen, daß A, B und C die einzigen Elemente der Ordnung 2 sind. Sie erscheinen auf den drei Schlingen.

Es gibt zwei Ecken ersten Grades. Die Bewertungen, die von ihnen ausgehen, a und a^{-1} , haben die Ordnung 3.

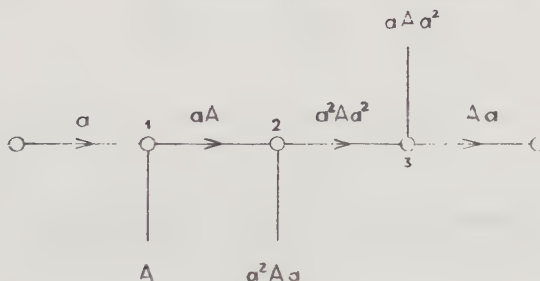
A_4 wird von a und A erzeugt. Die Erzeugendenrelationen lauten (s. Coxeter und Moser [1])

$$(6) \quad a^3 = A^2 = (Aa)^3 = e.$$

(Bemerkung zur Schreibweise : Da die Gruppe A_4 aus Abbildungen besteht, wird sie multiplikativ geschrieben. xy bedeutet, daß zuerst y und dann x ausgeführt wird.)

Wenn man die Elemente von A_4 durch a und A ausdrückt, geht Abb. 1 über in Abb. 2.

Abb. 2



An Abb. 2 läßt sich die Gültigkeit des Kirchhoffschen Gesetzes ablesen, wenn man (6) benutzt.

Die Ecken dritten Grades werden wie in Abb. 2 numeriert.

$$1 \quad a^{-1}(aA)A = e$$

$$2 \quad (Aa^2)(a^2Aa^2)(a^2Aa) = (Aa)^3 = e$$

$$3 \quad (aAa^2)(Aa)(aAa) = a^2(a^2A)^3a = a^2(Aa)^{-3}a = e$$

Abb. 1 gibt also einen bewerteten Graphen an, der nach Satz 1 eine Dreieckseinbettung von K_{12} bestimmt.

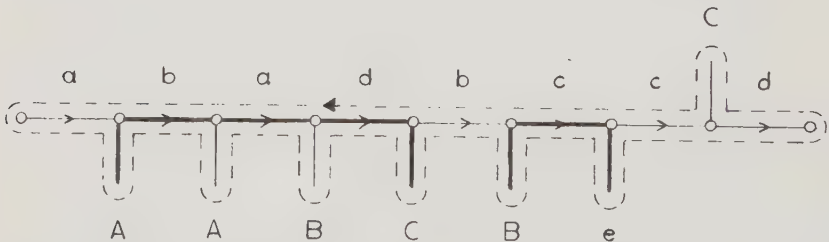
3.2. Lösung für $n = 24$

Als Gruppe wird das direkte Produkt $\mathbb{Z}_2 \times A_4$ gewählt, d.h. die Elemente von A_4 werden indiziert, damit die Anzahl der Bewertungen vergrößert wird.

Der Graph für $n = 24$ wird in Abb. 3 gezeigt. Man kann sich vorstellen, daß er aus Abb. 1 hervorgeht, indem ein Zwischenteil eingesetzt wird. Die Endstücke sind erhalten geblieben. Es muß allerdings bemerkt werden, daß durch die Form des Graphen (mit Rotation) und die Gruppe die Verteilung der Bewertungen auf die gerichteten Kanten nicht eindeutig bestimmt ist.

Stark ausgezeichnete Kanten haben als erste Komponente der Bewertung 1 (in beiden Richtungen), die schwach gezeichneten 0. Die zweite Komponente ist jeweils an der Kante verzeichnet.

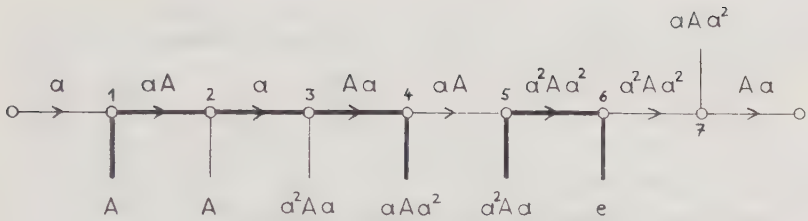
Abb. 3



Auf der Zirkulation kommt jedes Element von $\mathbb{Z}_2 \times A_4$ bis auf das neutrale Element $(0,e)$ genau einmal vor. Die Bewertungen der Schlingen sind die einzigen, die die Ordnung 2 haben. $(0,a)$ und $(0,d)^{-1}$ haben die Ordnung 3.

Da die Gruppenoperation in $\mathbb{Z}_2 \times A_4$ komponentenweise vollzogen wird, kann das Kirchhoffsche Gesetz getrennt nachgewiesen werden. Für die erste Komponente gilt es offensichtlich. Bei der zweiten ist der Beweis einfacher, wenn man die Elemente wie beim ersten Beispiel durch a und A ausdrückt.

Abb. 4



Die Kombinationen 1, 5 und 7 kommen schon in 3.1. vor.

$$\underline{2} \quad A (Aa^2) a = e$$

$$\underline{3} \quad (a^2 A a) a^2 (Aa) = e$$

$$\underline{4} \quad (a^2 A)(aA)(aAa^2) = a^2 (Aa)^3 a = e$$

$$\underline{6} \quad (a^2 A a^2)^{-1} (a^2 A a^2) e = e$$

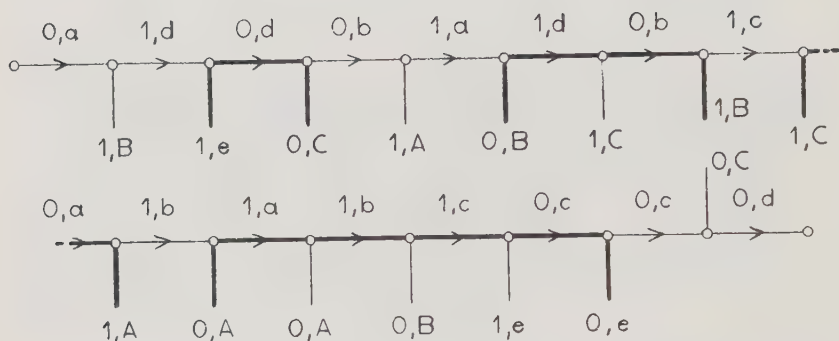
Demnach stellt Abb. 3 einen bewerteten Graphen für $n = 24$ dar, der die Forderungen 1.) bis 8.) erfüllt.

3.3. Lösung für $n = 48$

Es wird zunächst nicht der Graph für $s = 3$ angegeben, sondern der für $s = 4$. Wie in § 5 allgemein gezeigt wird, sind die Lösungen für $n = 12s$, wobei s eine Zweierpotenz ist, alle gleichartig. Der Graph hat immer die Form eines "Kammes", dessen Länge mit n wächst.

Die Gruppe sei $\mathbb{Z}_2 \times (\mathbb{Z}_2 \times A_4)$. Abb. 5 zeigt den Graphen. Die erste Komponente wird wie oben durch stark und schwach gezeichnete Kanten dargestellt, die zweite und dritte Komponente werden zu einem geordneten Paar zusammengefaßt.

Abb. 5



Wie in den ersten beiden Beispielen gibt es wieder genau eine Zirkulation, und man überlegt sich leicht, daß außer $(e,0,0)$ alle Elemente genau einmal auf ihr vorkommen. Die Forderungen 6.) und 7.) von Satz 1 sind auch erfüllt. Die Gültigkeit des Kirchhoffschen Gesetzes für die ersten beiden Komponenten sieht man leicht ein. Der Nachweis für die dritte Komponente erfolgt entsprechend 3.1. und 3.2. .

3.4. Lösung für $n = 36$

Für $n = 36$ wird die Gruppe $\mathbb{Z}_3 \times A_4$ genommen. Die Elemente, die die Ordnung 2 haben, sind alle von der Form

$$(0, x), \text{ wobei } x \in A_4 \text{ die Ordnung 2 hat.}$$

Insgesamt beträgt die Anzahl 3. Der gesuchte Graph muß also 35 Bewertungen, davon nur drei auf einer Schlinge, haben. Daraus geht hervor, daß er prinzipiell von den ersten drei Graphen verschieden sein muß, bei denen jeweils etwa ein Drittel der Bewertungen auf einer Schlinge auftritt. Man kann den gesuchten Graphen aus dem Beispiel 3.1. wie folgt konstruieren.

Man zeichne den Graphen, so daß alle Schlingen in dieselbe Richtung zeigen (Abb. 6). Dadurch wird es notwendig, Ecken mit Rotation im Uhrzeigersinn ($\bullet$) von solchen mit Rotation entgegen dem Uhrzeigersinn ($\circ$) zu unterscheiden.

Abb. 6

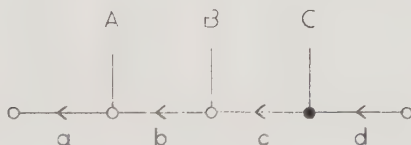


Kehrt man die Rotation jeder Ecke um und geht zu den inversen Bewertungen über, so gilt weiterhin das Kirchhoffsche Gesetz. Die Rotationen an den beiden Eckpunkten vom Grad 1 können beliebig gewählt werden. Es ergibt sich Abb. 7.

Es gilt z.B. :

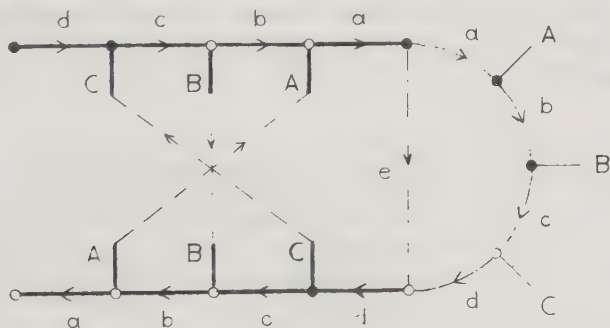
$$b^{-1} A a = (a^{-1} A b) = e$$

Abb. 7



Dreht man den in Abb. 7 dargestellten Graphen um 180° und zeichnet darunter den Graphen noch einmal in Ausgangsstellung, so erhält man den stark ausgezeichneten Teil von Abb. 8.

Abb. 8

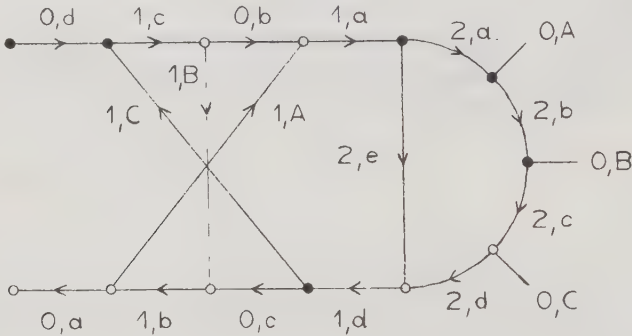


Da A, B und C mit ihren Inversen übereinstimmen, kann man die Schlingen paarweise verbinden und eine beliebige Richtung auf den entstehenden Kanten festlegen (---). Die beiden Ecken ganz rechts werden verbunden, die Kante erhält die Bewertung e (-----).

Der Graph von Abb. 6 wird verbogen zu einer "Krone" und rechts angesetzt. An den beiden Anschlußpunkten gilt offensichtlich das Kirchhoffsche Gesetz.

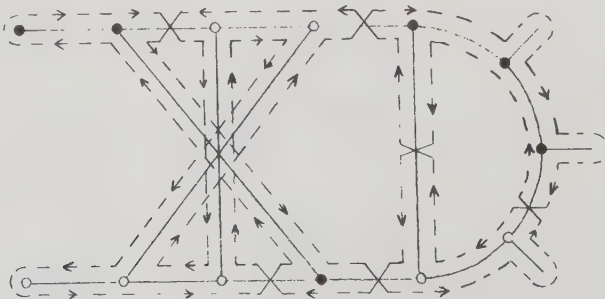
Danach werden alle Bewertungen mit Elementen aus $\mathbb{Z}_3$ indiziert, so daß die auf den drei Schlingen die Ordnung 2 haben, jedoch keine weiteren. Der Graph in seiner endgültigen Form erscheint in Abb. 9.

Abb. 9



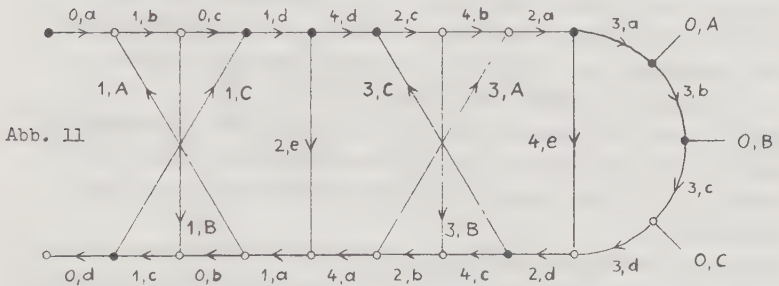
Man sieht einfach ein, daß auf dem Graphen jedes Element von $\mathbb{Z}_3 \times A_4 \setminus \{(0,e)\}$ genau einmal vorkommt und daß auch für die erste Komponente in allen Fällen das Kirchhoffsche Gesetz gilt. Die beiden Kanten links haben Bewertungen vom Grad 3. In Abb. 10 ist der Graph noch einmal skizziert und der induzierte Kreislauf eingezeichnet. Insgesamt ist gezeigt, daß der bewertete Graph von Abb. 9 für $n = 36$ geeignet ist.

Abb. 10



3.5. Lösung für $n = 60$

Ohne Beweis wird noch der Graph für $n = 60$ angegeben. Er soll den Weg zeigen, wie man bei größeren Werten von s vorgeht. Es wird die Gruppe $\mathbb{Z}_5 \times A_4$ benutzt. Durch die Konstruktion ist von vornherein die Gültigkeit des Kirchhoffschen Gesetzes für die zweite Komponente gesichert. Der rechte "Kasten" und die "Krone" stimmen in der zweiten Komponente mit dem letzten Beispiel vollständig überein.



§ 4. Vorbemerkungen zur allgemeinen Lösung

Dieser Paragraph dient dazu, den Aufbau des Graphen - ohne Rücksicht auf die verwendete Gruppe - verständlich zu machen.

Sei $n = 12s$, $s \in \mathbb{N}$. Dann läßt sich s in eindeutiger Weise darstellen in der Form

$$(7) \quad s = 2^m (2r + 1),$$

wobei m und r nicht negative ganze Zahlen sind.

Im Folgenden sei vorausgesetzt, daß die Lösungen für alle Zahlen n der Form $n = 12 \cdot 2^m$, $m \in \mathbb{N}_0$, schon gefunden sind und die in Abb. 12 angegebene Gestalt haben. Im nächsten Paragraphen zeigt sich, daß dies

Abb. 12



möglich ist. Der Graph hat $4 \cdot 2^m$ horizontale Kanten (mit insgesamt $2 \cdot 4 \cdot 2^m = 8 \cdot 2^m$ Bewertungen) und $4 \cdot 2^m - 1$ Schlingen. Zusammen gibt es also $8 \cdot 2^m + 4 \cdot 2^m - 1 = 12 \cdot 2^m - 1$ Bewertungen. Unter dieser Voraussetzung soll für beliebiges $s \in \mathbb{N}$ die Lösung aufgebaut werden. Sei $b = 2^{m+2}$. Die Gruppe heiße G .

Der Graph erfüllt insbesondere die Forderungen 6.), 7.) und 8.) von Satz 1. Dies gilt dann auch für die Graphen (I), (II), (III) und (IV) in Abb. 13.

(I) ergibt sich aus Abb. 12 durch Drehung um 180° und Übergang zu den inversen Bewertungen und Rotationen. Für die Endpunkte wird die Rotation passend festgesetzt. (III) entsteht, indem die Schlingen nach unten gezeichnet und die Rotationen umgekehrt werden. (II) geht aus (I), (IV) aus (III) durch Drehung um 180° hervor.

Alle y_1 haben die Ordnung 2, folglich kann man einander entsprechende Schlingen diagonal verbinden und auf den entstehenden Kanten eine beliebige Richtung festlegen, ohne das Kirchhoffsche Gesetz zu beeinträchtigen.

Man zeichne jeweils auf der rechten Seite eine vertikale Kante mit der Bewertung e ein. An den Kasten auf der rechten Seite setze man den Graphen von Abb. 12 in gebogener Form.

Es ist klar, daß man an den so entstandenen Graphen den linken Kasten ansetzen kann und anschließend abwechselnd die Kombinationen (I), (II) und (III), (IV).

Wenn man außer der Krone noch r Kästen hinzunimmt und annimmt, daß alle Bewertungen, die nicht auf Schlingen liegen, später noch so indiziert werden, daß sie nicht von der Ordnung 2 sind, dann hat man in jedem Kasten $2 \cdot 3 \cdot b$ Bewertungen, in der Krone $3 \cdot b - 1$ und insgesamt

$$6 \cdot br + 3b - 1 = 3b(2r + 1) - 1 = n - 1$$

Bewertungen auf dem ganzen Graphen.

Ausgehend von der Gruppe G wird man eine größere Gruppe aufbauen, deren Elementezahl für den neuen Graphen ausreicht (z.B. Bildung eines direkten Produkts), so daß verschiedene Kanten unterschiedlich bewertet werden können.

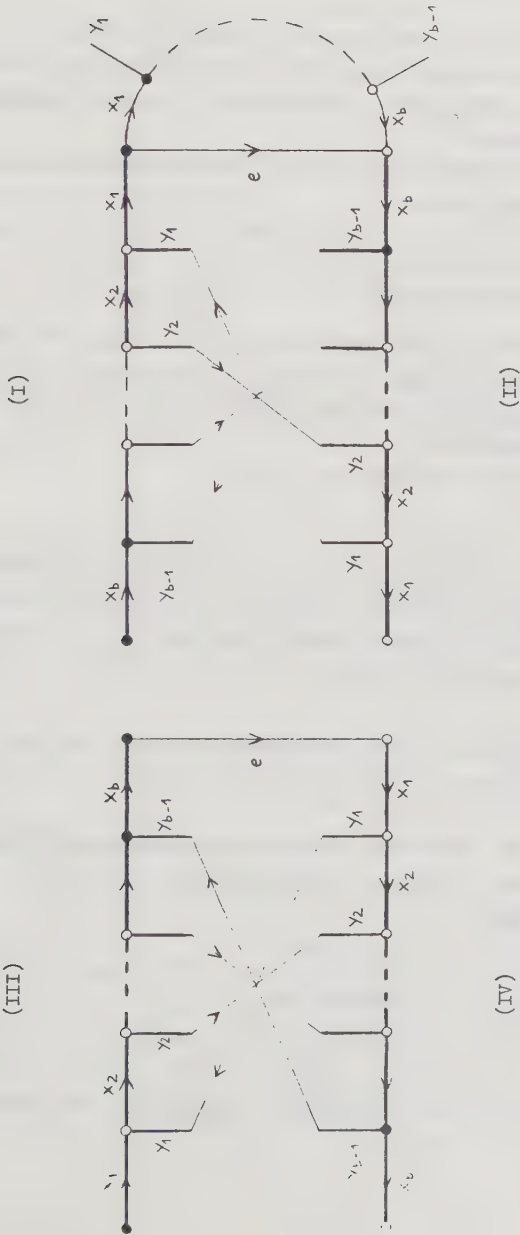


Abb. 13

§ 5. Allgemeine Lösung

Leider fehlt eine geeignete Methode, die es gestattet, auch im allgemeinen Fall die alternierende Gruppe A_n als Ausgangsgruppe zu nehmen, wie dies in den Beispielen von §3 geschehen ist. Die Schwierigkeiten werden in §6 angegeben.

Statt dessen wird die Gruppe Γ_{12s} benutzt. Zu ihrer Definition sind einige Vorbereitungen nötig.

5.1. Definition der Gruppe Γ_{12s}

5.1.1.

Es sei k eine natürliche Zahl. Man kürzt mit $GF(2^k)$ den (bis auf Isomorphie eindeutig bestimmten) Körper mit 2^k Elementen ab. Für die additive bzw. multiplikative Gruppe wird $F^+(2^k)$ bzw. $F^*(2^k)$ geschrieben. Beide sind kommutativ.

$GF(2^k)$ ist der Körper der Wurzeln des Polynoms

$$x^{2^k-1} - 1 = 0$$

über dem Primkörper $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ der Ordnung 2, d.h. $GF(2^k)$ ist der Körper der $(2^k - 1)$ -ten Einheitswurzeln. Davon ist mindestens eine primitiv. $F^*(2^k)$ ist also eine zyklische Gruppe der Ordnung $2^k - 1$. θ sei ein fest gewähltes erzeugendes Element.

5.1.2.

$F^+(2^k)$ kann als Vektorraum über $GF(2)$ aufgefaßt werden. Die Menge

$$\{1, \theta, \theta^2, \dots, \theta^{k-1}\}$$

ist dann eine Basis. Es wird ein Vektorraum-Isomorphismus f auf dieser Basis definiert. Die anderen Funktionswerte ergeben sich durch lineare Fortsetzung.

$$f: F^+(2^k) \longrightarrow F^+(2^k)$$

$$f(1) = \theta, \quad f(\theta) = 1 + \theta$$

$$f(\theta^i) = \theta^i \quad \text{für } i = 2, 3, \dots, k-1$$

5.1.3.

Der Körper $GF(2^k)$ hat die Charakteristik 2. Daher gilt für jedes $x \in GF(2^k)$

$$x + x = 0.$$

$$\begin{aligned}\text{Damit folgt : } f^3(1) &= f^2(\theta) = f(1 + \theta) = \theta + 1 + \theta = 1 \\ f^3(\theta) &= f^2(1 + \theta) = f(1) = \theta\end{aligned}$$

$$\text{Demnach gilt } f^3 = 1_{F^+(2^k)} .$$

$$\text{Man definiert } A = \{1, f, f^2\} .$$

Mit "Hintereinanderausführen von Abbildungen" wird A zu einer zyklischen Gruppe der Ordnung 3.

Bemerkung: Die Größen θ , f und A hängen von dem gewählten k ab. Man müßte sie eigentlich indizieren (θ_k , f_k , A_k), wenn mehrere k -Werte auftreten. Dies geschieht nicht, da immer klar sein wird, welches k zugrunde liegt.

5.1.4.

Man geht von den beiden Gruppen $(F^+(2^k), +)$ und $(A, \circ)$ aus und definiert eine Multiplikationsvorschrift auf dem kartesischen Produkt $F^+(2^k) \times A$.

$$(p, a) (q, b) = (p + a(q), ab)$$

Es wird bewiesen, daß dadurch eine Gruppe entsteht. Sie wird wie bei M. Hall [17, S.88] als $F^+(2^k) * A$ geschrieben und normales Produkt genannt.

Bemerkung: Von zwei beliebigen Gruppen kann im allgemeinen nicht das normale Produkt gebildet werden. Vielmehr muß die zweite auf der ersten operieren.

Beweis:

Es liegt eine innere Operation vor. Sie ist assoziativ.

$$p, q, v \in F^+(2^k), \quad a, b, c \in A$$

$$\begin{aligned}[(p, a) (q, b)] (v, c) &= (p + a(q), ab) (v, c) \\ &= (p + a(q) + a(b(v)), abc)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(p, a) [(q, b) (v, c)] &= (p, a) (q + b(v), bc) \\ &= (p + a(q) + a(b(v)), abc)\end{aligned}$$

Die Einheit ist $(0, 1)$.

$$p \in GF(2^k), \quad a \in A \quad \Rightarrow \quad (0, 1)(p, a) = (p, a)$$

Das zu (p, a) inverse Element lautet $(a^{-1}(p), a^{-1})$.

$$(a^{-1}(p), a^{-1})(p, a) = (a^{-1}(p) + a^{-1}(p), a^{-1}a) = (0, 1)$$

Demnach wurde tatsächlich eine Gruppe definiert. Sie ist nicht kommutativ (für $k \geq 2$) und wird bezeichnet mit

$$G(k) = F^+(2^k) \rtimes A.$$

5.1.5.

Sei s eine beliebige natürliche Zahl, $n = 12s$. Wie in §4 wird s zerlegt.

$$s = 2^m(2r + 1) \quad \text{mit } m, r \in \mathbb{N}_0$$

Im Folgenden sei n fest, also auch s, m und r . Sei $k = m + 2$.

Die Gruppe Γ_{12s} wird als direktes Produkt definiert.

$$\Gamma_{12s} = \mathbb{Z}_{2r+1} \times G(m+2)$$

$G(m+2)$ hat $3 \cdot 2^{m+2}$, Γ_{12s} demnach $3 \cdot 2^{m+2}(2r + 1) = n$ Elemente wie erforderlichlich.

Einige Eigenschaften von $G(k)$, die später gebraucht werden, sollen nun angegeben werden.

5.2. Eigenschaften von $G(k)$

5.2.1.

In Satz 1 spielen Elemente der Ordnung 2 und 3 eine besondere Rolle. Sie werden deshalb hier angegeben.

Lemma 1:

$$(p, a) \in G(k)$$

$$(p, a) \text{ hat die Ordnung } 2 \iff p \neq 0, a = 1$$

Beweis:

$$"\Rightarrow" : (p, a)^2 = (0, 1) = (p + a(p), a^2) \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = 1$$

Da (p, a) aber nicht das neutrale Element ist, muß $p \neq 0$ gelten.

$$"\Leftarrow" : \text{Da } p \neq 0 \text{ ist, ist } (p, a) \text{ vom neutralen Element verschieden.}$$

$$(p, a)^2 = (p, 1)^2 = (p + p, 1) = (0, 1)$$

Lemma 2:

$$(p, a) \in G(k)$$

$a \neq 1$, $p = c_0 + c_1 \theta$ mit $c_0, c_1 \in F^+(2) \Rightarrow (p, a)$ hat die Ordnung 3

Beweis:

$$a \neq 1 \Rightarrow (p, a) \neq (0, 1), \quad \{a, a^2\} = \{f, f^2\}$$

$$\begin{aligned} (p, a)^3 &= (p + a(p) + a^2(p), 1) = (p + f(p) + f^2(p), 1) \\ &= (c_0 + c_1 \theta + c_0 \theta + c_1(1 + \theta) + c_0(1 + \theta) + c_1(\theta + 1 + \theta), 1) \\ &= (0, 1) \end{aligned}$$

5.2.2.

Für Elemente aus $G(k)$ werden Abkürzungen eingeführt. Sei $b = 2^k$.

$$s_i = (\theta^i + \theta^{i+1}, 1) \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, b-1$$

$$t_i = (\theta^i, f) \quad t_b = (0, f)$$

Nach dem in 5.2.1. Gesagten haben t_1 und t_b die Ordnung 3. Alle Elemente s_i sind von der Ordnung 2, und es gibt keine weiteren unter den oben aufgeschriebenen mit dieser Eigenschaft.

Jedes t_i hat als zweite Komponente f , jedes t_j^{-1} aber $f^{-1} = f^2 \neq f$ (für $k \geq 2$). Daher besteht die Menge M aus

$$b - 1 + 2b = 3b - 1 \text{ Elementen.}$$

$$M = \{s_1, s_2, \dots, s_{b-1}, t_1, \dots, t_b, t_1^{-1}, \dots, t_b^{-1}\}$$

M ist in $G(k)$ enthalten und hat ein Element weniger als $G(k)$.

$(0, 1) \notin M$. Also gilt :

$$M = G(k) \setminus \{(0, 1)\}$$

5.2.3.

Beim Nachweis des Kirchhoffschen Gesetzes werden einige Gleichungen benutzt, die die s_i und t_i enthalten. Sie werden in Lemma 3 abgeleitet.

Lemma 3:

$$s_i t_i = t_{i+1} \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, b-2$$

$$t_{b-1} s_{b-1} = t_b$$

Beweis: $i = 1, 2, \dots, b-2$

$$s_i t_i = (\theta^i + \theta^{i+1}, 1) (\theta^i, f) = (\theta^i + \theta^{i+1} + \theta^i, f) = t_{i+1}$$

$F^*(2^k)$ ist eine zyklische Gruppe der Ordnung $2^k - 1$. Daher gilt :

$$\theta^{2^k-1} = 1, \quad \theta^{2^k} = \theta$$

$$\begin{aligned} t_{b-1} s_{b-1} &= (\theta^{b-1}, f) (\theta^{b-1} + \theta^b, 1) = (1 + f(1 + \theta), f) \\ &= (1 + \theta + 1 + \theta, f) = (0, f) = t_b \end{aligned}$$

5.2.4.

Die Bewertungen für den Graphen stammen nicht direkt aus $G(k)$, sondern aus Γ_{12s} . Dort sind die einzigen Elemente, die die Ordnung 2 haben, von der Form

$$(s_i, 0) \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, b-1 \quad (0 \in \mathbb{Z}_{2r+1}),$$

da $\mathbb{Z}_{2r+1}$ keine Elemente der Ordnung 2 enthält.

Die Elemente $(t_1, 0)$ und $(t_b, 0)$ haben die Ordnung 3, was aber auch noch für andere Elemente zutreffen kann.

5.3. Der Graph für die Gruppe Γ_{12s}

5.3.1.

Ohne Einzelheiten wird zunächst die prinzipielle Bauweise, wie sie durch die Betrachtungen in §4 nahegelegt wird, angegeben. Der Graph besteht aus einer Krone und r Kästen, die auf der linken Seite offen sind (Abb. 14).



Jede gerichtete Kante wird mit einem Element aus Γ_{12s} bewertet, d.h. mit einem Paar (X, Y) mit $X \in \mathbb{Z}_{2r+1}$ und $Y \in G(m+2)$. Es ist übersichtlicher, die Verteilung der Elemente komponentenweise anzugeben. Die Rotationen der Eckpunkte stimmen in beiden Abbildungen überein.

5.3.2. Krone

Abb. 15 Bewertungen aus $\mathbb{Z}_{2r+1}$



Abb. 16 Bewertungen aus $G(m+2)$



Wie in §4 erwähnt wurde, ist die Krone für den Zweierpotenz-Anteil von s zuständig. Satz 2 präzisiert diese Aussage.

Satz 2 :

Abb. 16 stellt einen bewerteten Graphen dar, der mit der Gruppe $\Gamma_{12 \cdot 2^m} = \mathbb{Z}_1 \times G(m+2) = G(m+2)$ die Forderungen 1.) bis 8.) von Satz 1 erfüllt.

Beweis:

- 1.) $|\Gamma_{12 \cdot 2^m}| = 12 \cdot 2^m$, Einheit $(0,1)$
- 2.) $(0,1)$ kommt nicht als Bewertung vor (5.2.2.). Gemäß der Definition tragen entgegengesetzte Kanten zueinander inverse Bewertungen. Die Bewertungen auf den Schlingen haben die Ordnung 2 (5.2.2.).
- 3.) klar
- 4.) Es gibt genau eine Zirkulation wie bei den ersten drei Fällen in §3.
- 5.) Jedes Element von $M = G(m+2) \setminus \{(0,1)\}$ kommt genau einmal vor.
- 6.), 7.) Nach 5.2.2. sind die Bewertungen auf den Schlingen die einzigen Elemente der Ordnung 2, und t_1 und t_b^{-1} haben die Ordnung 3.
- 8.) Bestätigung des Kirchhoffschen Gesetzes für die Ecken mit Rotation im Uhrzeigersinn nach Lemma 3 :
 $i = 1, 2, \dots, b-2$:

$$t_i^{-1} s_i t_{i+1} = (s_i t_i)^{-1} t_{i+1} = t_{i+1}^{-1} t_{i+1} = (0,1)$$

Für die Ecke mit Rotation entgegen dem Uhrzeigersinn gilt :

$$s_{b-1} t_{b-1}^{-1} t_b = (t_{b-1} s_{b-1})^{-1} t_b = t_b^{-1} t_b = (0,1)$$

Falls s eine Zweierpotenz ist, gilt $r = 0$; der Graph hat dann keinen Kasten, sondern besteht nur aus der Krone. In diesem Fall hat die Lösung die einfache Gestalt von Abb. 16.

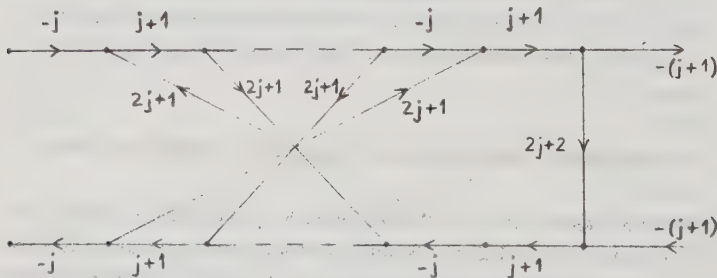
Offensichtlich gilt auch in Abb. 15 an jedem Eckpunkt dritten Grades das Kirchhoffsche Gesetz.

5.3.3. Kästen

5.3.3.1. Verteilung der Bewertungen aus $\mathbb{Z}_{2r+1}$

Es werden nun Einzelheiten der Kästen angegeben, zuerst die Verteilung der ersten Komponenten. Für die zweiten Komponenten aus $G(m+2)$ ist eine Fallunterscheidung notwendig, die auch die Rotation einzelner Eckpunkte betrifft. Daher werden in Abb. 17 alle Eckpunkte neutral durch einen kleinen Punkt dargestellt. Da $(\mathbb{Z}_{2r+1}, +)$ eine abelsche Gruppe ist, hat die später definierte Rotation keinen Einfluß auf die Gültigkeit des Kirchhoffschen Gesetzes.

Abb. 17 : Bewertungen aus $\mathbb{Z}_{2r+1}$ beim Kasten Nr. j , $j = 0, 1, \dots, r-1$



Die dünn gezeichneten Kanten rechts gehören zum anschließenden Kasten Nr. $j+1$ bzw. für die Kastennummer $j = r-1$ zur Krone.

Die oben angegebene Verteilung der Bewertungen ist möglich, da auf der oberen und der unteren Horizontale je eine gerade Anzahl von Kanten liegen soll. Die Anzahl der Diagonalen dagegen ist ungerade ($2^{m+2} - 1$). Die Diagonalen sind abwechselnd nach oben und nach unten gerichtet.

Für alle Ecken dritten Grades in Abb. 17 gilt das Kirchhoffsche Gesetz. Sei $j = 0, 1, \dots, r-1$. Dann ist

$$j+1 = -j + (2j+1) \quad \text{und} \quad -(j+1) + (2j+2) = j+1.$$

5.3.3.2. Kästen vom Typ I

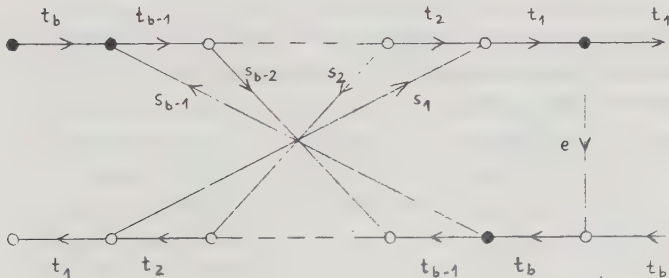
Gemäß Abb. 14 hat jeder Kasten eine Nummer. Wenn für die Kastennummer j gilt

$$j \not\equiv r \pmod{2},$$

dann heißt der Kasten vom Typ I, andernfalls vom Typ II. In dem Graphen treten also die Kästen vom Typ I und II abwechselnd auf. Der an die Krone anschließende Kasten gehört zum Typ I.

Abb. 18 Kasten vom Typ I

Verteilung der Rotationen und der Bewertungen aus $G(m+2)$



Bei allen nicht explizit eingezeichneten Knoten verläuft die Rotation entgegen dem Uhrzeigersinn. An den Knoten dritten Grades in Abb. 18 gilt das Kirchhoffsche Gesetz. Nach Lemma 3 bestehen für $i = 1, 2, \dots, b-2$ die Gleichungen

$$s_i t_i t_{i+1}^{-1} = s_i t_i t_i^{-1} s_i = (0,1) .$$

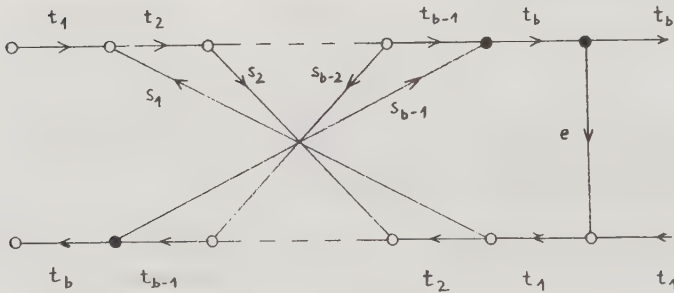
Außerdem gilt

$$t_{b-1} s_{b-1} t_b^{-1} = t_{b-1} s_{b-1} s_{b-1}^{-1} t_{b-1}^{-1} = (0,1) .$$

5.3.3.3. Kästen vom Typ II

Abb. 19 Kasten vom Typ II

Verteilung der Rotationen und der Bewertungen aus $G(m+2)$



Die nicht eingezeichneten Eckpunkte haben eine Rotation entgegen dem Uhrzeigersinn. Für alle Knoten dritten Grades in Abb. 19 gilt das Kirchhoffsche Gesetz, denn es ist

$$s_{b-1} t_{b-1}^{-1} t_b = s_{b-1} t_{b-1}^{-1} t_{b-1} s_{b-1} = (0,1)$$

und

$$t_i^{-1} s_i t_{i+1} = t_i^{-1} s_i s_i t_i^{-1} = (0,1)$$

für $i = 1, 2, \dots, b-2$.

5.4. Beweis

Satz 3 :

Die Abbildungen 14 bis 19 definieren einen bewerteten Graphen, der die Eigenschaften 1.) bis 8.) von Satz 1 (s.S. 3) erfüllt. Die zugehörige Gruppe ist Γ_{12s} mit $n = 12s$.

Beweis :

- 1.) $\left| \Gamma_{12s} \right| = 12s = n$ nach 5.1.5. , Einheit : $(0,e)$
- 2.) Die Bewertungen des Graphen stammen aus $\Gamma_{12s} \cdot (0,e)$ kommt nicht vor. Sei nämlich die zweite Komponente einer Bewertung e , so lautet die erste Komponente

$$2j + 2 \quad \text{mit} \quad j = 0, 1, \dots, r-1$$

Für diese j -Werte ist $2j + 2 \not\equiv 0 \pmod{2r + 1}$. Der Graph ist so erklärt, daß entgegengesetzte Kanten inverse Bewertungen haben. Die Schlingen tragen Elemente der Ordnung 2 (5.2.4.).
- 3.) klar
- 6.) gilt gemäß 5.2.4.
- 7.) Von den beiden Eckpunkten ersten Grades gehen die Bewertungen $(t_b, 0)$ und $(t_1, 0)^{-1}$ bzw. $(t_1, 0)$ und $(t_b, 0)^{-1}$ aus. Sie haben die Ordnung 3 (5.2.4.).
- 8.) Das Kirchhoffsche Gesetz wurde komponentenweise bestätigt.
- 4.) Beweis durch vollständige Induktion über r :

a) $r = 0$

Dann gilt die Behauptung nach Satz 2 und zwar für alle $m \in \mathbb{N}_0$.

b) Die Behauptung sei richtig für alle Graphen mit $r \leq L$ Kästen (jeweils $m \in \mathbb{N}_0$ beliebig).

Sei ein Graph mit $L+1$ Kästen für festes $m \in \mathbb{N}_0$ gegeben. Fällt der Kasten Nr. 0 fort, so entsteht ein neuer Graph. Seine Rotation stimmt überein mit der des Graphen für $12 \cdot 2^m (2L + 1)$. Man kann daher die Induktionsvoraussetzung anwenden.

Um Überschneidungen von Kanten zu vermeiden, wird die untere Linie des abgetrennten Kastens Nr. 0 umgeklappt. Die Rotationen müssen dann umgekehrt werden. Ist der Kasten vom Typ I, so erhält man Abb. 20.

Die schwach gezeichnete Ergänzung auf der rechten Seite gehört zum Kasten Nr. 1 oder im Fall $L = 0$ zur Krone.

Für den langen Weg $(- \cdots -)$ ist es wichtig zu wissen, daß es $b-1$ Diagonalen gibt, wobei $b-1 \geq 2^2 - 1 = 3$ und immer ungerade ist. Man bezeichne diesen Weg mit P , den anderen $(- - -)$ mit Q . Die nach Induktionsvoraussetzung auf dem Restgraphen bestehende einzige Zirkulation wird nun an zwei Stellen unterbrochen.

Sie enthält die Kombinationen

$$\dots (t_1, -1)^{-1} (t_1, -1) \dots \text{und} \dots (t_b, -1) (t_b, -1)^{-1} \dots$$

Man füge ein

$$\dots (t_1, -1)^{-1} P (t_1, -1) \dots \text{und} \dots (t_b, -1) Q (t_b, -1)^{-1} \dots$$

Die neue Zirkulation durchläuft zusätzlich jede Kante des Kastens Nr. 0 in beiden Richtungen genau einmal.

Abb. 20 Kasten Nr. 0 vom Typ I

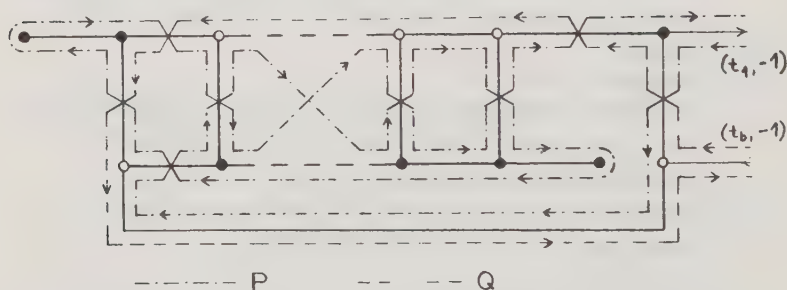
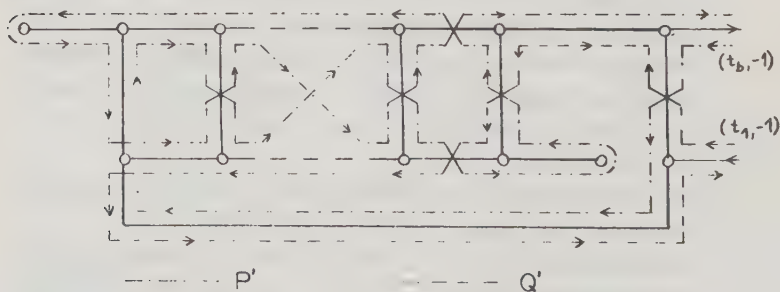


Abb. 21 zeigt den Kasten Nr. 0 für den Fall, daß er dem Typ II angehört. Die Argumentation verläuft entsprechend. Die zusammen-

Abb. 21 Kasten Nr. 0 vom Typ II



gesetzte Zirkulation enthält die Kombinationen

$$\dots (t_b, -1)^{-1} P' (t_b, -1) \dots \text{und} \dots (t_1, -1) Q' (t_1, -1)^{-1} \dots$$

Damit ist Forderung 4.) bewiesen.

5.) Es muß bewiesen werden, daß jedes Element von Γ_{12s} außer der Einheit genau einmal auf dem Graphen vorkommt.

Sei die zweite Komponente einer Bewertung t_i . Auf den horizontalen Kanten kommt jedes der folgenden Elemente genau einmal als Bewertung vor (und keine weiteren).

$$\begin{aligned} (-j, t_i) , (j+1, t_i) & \quad i = 1, 2, \dots, b \\ (j, t_i^{-1}) , (-j-1, t_i^{-1}) & \quad j = 0, 1, \dots, r-1 \end{aligned}$$

Auf der Krone, jedoch nicht auf den Schlingen, kommen genau die folgenden Elemente vor.

$$(-r, t_i) , (r, t_i^{-1}) \quad i = 1, 2, \dots, b$$

Für t_i als zweite Komponente tritt jedes Element der Menge

$$\{0, -1, \dots, -r+1\} \cup \{-r\} \cup \{1, 2, \dots, r\}$$

als erste Komponente auf. Diese Zahlen sind modulo $2r+1$ identisch mit

$$\{2r+1, 2r, \dots, r+2\} \cup \{r+1\} \cup \{r, r-1, \dots, 2, 1\} \quad .$$

Also treten alle Restklassen auf.

Bei t_i^{-1} sind die entsprechenden Mengen

$$\{0, 1, \dots, r-1\} \cup \{r\} \cup \{-1, -2, \dots, -r\}$$

und

$$\{0, 1, \dots, r-1\} \cup \{r\} \cup \{r+1, r+2, \dots, 2r\} \quad ,$$

es sind auch hier alle Elemente von $\mathbb{Z}_{2r+1}$ vertreten.

Sei nun die zweite Komponente s_i . Dann kommt im Kasten Nr. j vor

$$\begin{aligned} (2j+1, s_i) & \quad j = 0, 1, \dots, r-1 \\ (-2j-1, s_i) & \quad i = 1, 2, \dots, b-1 \end{aligned}$$

und auf den Schlingen

$$(0, s_i) \quad i = 1, 2, \dots, b-1 \quad .$$

Für die erste Komponente findet man daher die Menge

$$\{1, 3, 5, \dots, 2r-1\} \cup \{0\} \cup \{-1, -3, -5, \dots, -2r+1\}$$

bzw.

$$\{1, 3, 5, \dots, 2r-1\} \cup \{0\} \cup \{2r, 2r-2, 2r-4, \dots, 2\} \quad .$$

Darin kommt jedes Element von $\mathbb{Z}_{2r+1}$ vor.

Auf den vertikalen Kanten des Graphen gibt es die Bewertungen

$$(2j+2, e) , (-2j-2, e) \quad j = 0, 1, \dots, r-1.$$

Als Menge für die erste Komponente ergibt sich

$$\{2, 4, 6, \dots, 2r\} \cup \{-2, -4, -6, \dots, -2r\}$$

bzw.

$$\{2, 4, 6, \dots, 2r\} \cup \{2r-1, 2r-3, \dots, 3, 1\}$$

Darin kommt jedes Element von $\mathbb{Z}_{2r+1} \setminus \{0\}$ vor.

Damit sind alle auftretenden Bewertungen erfaßt. Nach 5.2.2.

schöpfen sie $\prod_{12s} \setminus \{(0, e)\}$ aus.

Insgesamt ist der Beweis von Satz 3 erbracht.

§ 6. Notwendigkeit nicht kommutativer Gruppen

In diesem Paragraphen erweist sich, daß es unmöglich ist, eine allgemeine Index 1-Lösung des Falles 0 mit abelscher Gruppe anzugeben.

Der Beweis gliedert sich in zwei Teile. Zunächst wird bewiesen, daß jede Dreieckseinbettung des vollständigen Graphen K_n in eine geschlossene orientierbare Fläche F mit dazu gehörigem zyklischen Schema auf einen Graphen mit den Eigenschaften 1.) bis 8.) führt. Danach wird gezeigt, daß kein solcher Graph existiert für $n = 12s$, $s = 2^m$, $m \in \mathbb{N}_0$, wenn man eine abelsche Gruppe zugrunde legt.

6.1.

Gegeben sei eine Dreieckseinbettung von K_n ($n > 4$). Die duale Zerlegung sei charakterisiert durch das Schema (S_n) .

$$\begin{array}{ccccccc} (S_n) & e: & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & \\ & a_i: & a_1 a_1 & a_1 a_2 & \dots & a_1 a_{n-1} & i = 1, 2, \dots, n-1 \end{array}$$

Da alle Ecken dreieckig sind, gilt die Regel R^* .

$$R^*: \quad i: \dots a \ k \ b \ \dots \implies \quad k: \dots b \ i \ a \ \dots$$

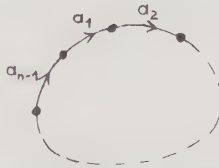
$G = \{e, a_1, \dots, a_{n-1}\}$ ist eine Gruppe mit n Elementen.

Der gesuchte Graph wird in vier Schritten konstruiert.

Schritt 1 :

Man stelle einen kreisförmigen Graphen her, dessen Knoten noch keine Rotation haben.

Abb. 22



Das Prinzip des weiteren Vorgehens besteht darin, daß Kanten mit zueinander inversen Bewertungen zusammengefaßt werden.

Schritt 2 :

Tritt als Bewertung ein Element zweiter Ordnung auf, so soll dort eine Schlinge entstehen.



Schritt 3 :

Kommt ein Element b direkt vor seinem Inversen vor, so zeichne man einen Knoten ersten Grades.



Da das Inverse eindeutig bestimmt ist, ist dieser Schritt wohldefiniert.

Behauptung 1: $b^3 = e$

Beweis : $e: \dots a b b^{-1} \dots$

$b: \dots b a b^2 e \dots$ und $\dots b^{-1} e a \dots \Rightarrow b^2 = b^{-1}$

Schritt 4 :

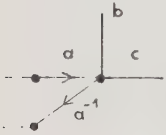
Die restlichen Kanten werden paarweise zusammengefaßt.



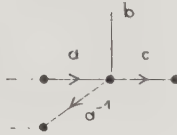
Um zu zeigen, daß dies möglich ist, werden die Behauptungen 2 und 3 bewiesen. Der Graph braucht nicht zerschnitten zu werden, es kann aber vorkommen, daß ein Teil des ursprünglichen Graphen umgeklappt werden muß. Der entstehende Graph ist daher nicht notwendig plättbar. Die Skizzen sollen zunächst einen Überblick über die möglichen Konstellationen geben.

Abb. 23

(a)



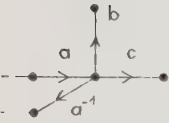
(b)



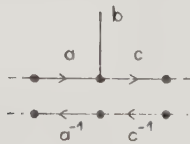
(c)



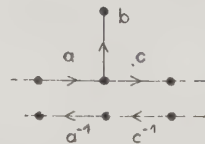
(d)



(e)



(f)



(g)



Behauptung 2: (s. e) - g))

$$e: \dots a b \dots \text{ und } \dots b^{-1} c \dots \Rightarrow a^{-1} \neq c, a^{-1}bc = e$$

Beweis:

$$b: \dots e bc \dots \text{ und } \dots e a \dots \Rightarrow a = bc$$

$$\text{Annahme: } a^{-1} = c. \quad a^{-1}: \dots e a^{-1}b \dots, \quad c: \dots e b^{-1} \dots \Rightarrow \\ a^{-1}b = b^{-1} \Rightarrow b^{-1}c = e \Rightarrow b = c \quad \text{W!}$$

Behauptung 3:

$$e: \dots a b \dots \text{ und } \dots b^{-1} c \dots \text{ und } \dots c^{-1} d \dots \Rightarrow$$

$$d = a^{-1}, \quad a^{-1}bc = e$$

b und b^{-1} , c und c^{-1} sind nicht notwendig voneinander verschieden.

Beweis:

$$b: \dots e bc \dots \text{ und } \dots e a \dots \Rightarrow a = bc$$

$$c: \dots e cd \dots \text{ und } \dots e b^{-1} \dots \Rightarrow cd = b^{-1} \Rightarrow$$

$$d = c^{-1}b^{-1} = (bc)^{-1} = a^{-1}$$

Damit ist ein Graph mit Bewertungen aus $G \setminus \{e\}$ entstanden, wobei jedes Element genau einmal vorkommt. Es ist bewiesen, daß er nur Knoten ersten und dritten Grades hat. Gemäß der Konstruktion haben entgegengesetzte Kanten zueinander inverse Bewertungen. Genau die Elemente zweiter Ordnung treten an den Schlingen auf. Bei Knoten ersten Grades hat die ausgehende Bewertung die Ordnung 3. Da der Graph von Abb. 22 nicht auseinander geschnitten wird, kann man auch den endgültigen Graphen in der Reihenfolge durchlaufen, die die erste Zeile des Schemas angibt. Dadurch wird an jedem Knoten eine Rotation definiert und zwar eindeutig, wie Behauptung 3 zeigt. Wenn ein Auszug der ersten Zeile lautet

$$e: \dots a b \dots \text{ und } \dots b^{-1} c \dots \text{ und } \dots c^{-1} a^{-1} \dots,$$

dann wird definiert:

$$r(a^{-1}) = b, \quad r(b) = c, \quad r(c) = a^{-1}.$$

Diese Rotation erzeugt umgekehrt wieder die ursprüngliche - und einzige - Zirkulation. Es gilt dann auch an jedem Knoten dritten Grades das Kirchhoffsche Gesetz. Die Rotation eines Knotens ersten Grades ist grundsätzlich beliebig, sie sei immer im Uhrzeigersinn festgelegt.

6.2.

Sei G eine abelsche Gruppe, $|G| = 12s$, $s = 2^m$, $m \in \mathbb{N}_0$; der Graph $S = S(G)$ habe die Eigenschaften 1.) bis 8.).

Da die Gruppe abelsch ist, kann sie als direktes Produkt zyklischer Gruppen dargestellt werden. Die Ordnungen dieser Gruppen sind Teiler von $12s = 3 \cdot 2^{m+2}$.

$$G = \mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2} \times \dots \quad \text{mit } n_1 = 3 \cdot 2^{r_1}, n_2 = 2^{r_2} \dots$$

$\mathbb{Z}_{n_1}$ hat zwei Elemente der Ordnung 3, alle $\mathbb{Z}_{n_i}$ ($i \geq 2$) haben keine.

Also hat auch G zwei Elemente der Ordnung 3, und daher hat S höchstens einen Knoten ersten Grades, da bei einem solchen Knoten ein- und auslaufende Bewertung voneinander verschieden und von der Ordnung 3 sein müssen.

Sei w die Gesamtzahl der Knoten von S , v die Anzahl der Knoten ersten Grades, d.h. $v = 0$ oder 1.

Es gibt $w-v$ Knoten dritten Grades. Von jedem gehen drei Bewertungen aus. Von jedem der v Knoten ersten Grades geht eine Bewertung aus.

Da es $n-1$ gibt, gilt:

$$n-1 = 12s-1 = 3(w-v) + v = 3w-2v$$

$$3(4s-w) = 1-2v = \begin{cases} 1 & v = 0 \\ -1 & v = 1 \end{cases}$$

Die letzte Zeile bedeutet einen Widerspruch, da $4s-w$ eine ganze Zahl ist. 1 und -1 sind aber nicht durch 3 teilbar.

Da in §5 die Lösung zunächst für den Fall angegeben wird, in dem s eine Zweierpotenz ist und sich der Rest daraus zwanglos ergibt, ist es sinnvoll, die allgemeine Lösung mit nicht-abelscher Gruppe zu formulieren, auch wenn es für spezielle s -Werte kommutative Lösungen geben sollte. Da sich der obige Beweis leicht auf alle s ausdehnen läßt, deren Primzahlzerlegung nicht die 3 enthält, kommen dafür noch die Werte $s = 3, 6, 9, \dots$ in Frage.

Für $s = 3$ und 6 kann man durch vollständige Fallunterscheidung der in Frage kommenden Gruppen zeigen, daß auch keine abelsche Gruppe benutzt werden kann.

Es kann eine zyklische Gruppe G kommen für keinen s -Wert in Frage. In diesem Fall hätte G ebenfalls nur zwei Elemente der Ordnung 3, und es wäre $|G| = 3$ oder 1. Wie oben würde sich ein Widerspruch ergeben.

Es ist aber möglich, eine kommutative Gruppe zu benutzen, wenn man Lösungen von höherem Index zuläßt. Man findet z.B. bei Youngs [15, S. 144] eine Index 4-Lösung für $n = 12$ mit der zyklischen Gruppe $\mathbb{Z}_{12}$.

6.3.

Die Argumentation von 6.2. läßt sich auf den Fall 3 der Heawood-schen Vermutung übertragen. Sei also

$$n = 12s + 3 = 3(4s + 1) .$$

Für $s = 1, 2, 3, \dots$ ist $4s + 1 = 5, 9, 13, \dots$. Sei nun $s \in \mathbb{N}$ derart gewählt, daß $4s + 1$ nicht durch 3 teilbar ist. n enthält dann den Primfaktor 3 nur einmal.

Setzt man voraus, daß G eine kommutative Gruppe ist, so folgt, daß G genau zwei Elemente der Ordnung 3 und der zugehörige Graph S höchstens einen Knoten ersten Grades hat. Mit den Bezeichnungen von 6.2. ergibt sich

$$\begin{aligned} 3(4s + 1) &= n - 1 = 3w - 2v \\ 3(4s + 1 - w) &= 1 - 2v = \begin{cases} 1 & v = 0 \\ -1 & v = 1 \end{cases} . \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung ist in sich widersprüchlich. Die Annahme, daß eine abelsche Gruppe verwendet werden kann, ist also falsch. Auch im Fall 3 kann man aber auf einen höheren Index ausweichen. Es gibt eine Index 3-Lösung mit einer zyklischen Gruppe (s. Ringel [8]).

6.4.

Der Zusammenhang zwischen der allgemeinen Lösung und den Beispielen von §3 ist durch die Isomorphie

$$G(m+2) \cong \mathbb{Z}_2^m \times A_4$$

gegeben. $G(m+2)$ läßt sich als direktes Produkt der beiden Untergruppen U_1 und U_2 darstellen, wobei U_1 aus allen Elementen der Form

$$(p, 1) \quad \text{mit} \quad p = \sum_{i=2}^{m+2} c_i \theta^i \quad \text{und} \quad c_i \in \text{GF}(2)$$

und U_2 aus allen Elementen der Form

$$(p, a) \quad \text{mit} \quad p = c_0 + c_1 \theta \quad \text{mit} \quad c_0, c_1 \in \text{GF}(2), \quad a \in A$$

bestehen soll. Dann gilt

$$U_1 \cong \mathbb{Z}_2^m, \quad U_2 \cong A_4.$$

§3 legt nahe, die allgemeine Lösung mit $\mathbb{Z}_2^m \times A_4$ zu formulieren, zumal diese Gruppe gegenüber $G(m+2)$ den Vorteil hat, daß man einfach rechnen kann. Wie in §4 gezeigt wurde, würde es genügen, für alle $m \in \mathbb{N}_0$ eine geeignete Verteilung der Elemente von $\mathbb{Z}_2^m \times A_4$ auf dem kammförmigen Graphen zu finden. Diese ist aber nicht bekannt und wird auch nicht durch die Isomorphie geliefert. Der Grund liegt darin, daß die Elemente s_i und t_i nicht mit Hilfe der Vektorraum-Basis definiert werden, sondern mit dem erzeugenden Element θ . Es ist nicht klar, welche Koeffizienten ein θ^i mit $i > m+1$ bezüglich der Basis hätte. Anders ausgedrückt besteht die Schwierigkeit darin, daß man zwar die Gruppentafel von $F^*(2^k)$ (in θ ausgedrückt) kennt, aber nicht die von $F^+(2^k)$. Die Aufgabe, diese Gruppentafel zu finden, ohne das Distributivgesetz zu verletzen, hat merkwürdigerweise Ähnlichkeit mit dem kombinatorischen Problem, ein zyklisches Schema mit der Regel R^* zu finden.

Zusammenfassung

Es ist bewiesen worden, daß es für jedes $s \in \mathbb{N}$ einen bewerteten Graphen $S(\Gamma_{12s})$ gibt mit den Eigenschaften 1.) bis 8.). Er bestimmt nach Satz 1 eine Dreieckseinbettung von K_n ($n = 12s$) in eine geschlossene orientierbare Fläche vom Geschlecht

$$p = \frac{(n-3)(n-4)}{12} = 12s^2 - 7s + 1.$$

Der dazu duale Graph zerlegt die Fläche in n paarweise benachbarte $(n-1)$ -Ecke. Daraus folgt $n = 12s \leq v_p$.

$$v_p \leq \chi_p \leq H(p)$$

$$H(p) = \left\lceil \frac{7 + \sqrt{1 + 48 + 12 \cdot 48 s^2 - 7 \cdot 48 s}}{2} \right\rceil = 12s$$

$$(8) \quad \chi_p = H(p)$$

Diese Gleichung ist bewiesen für alle Flächen, deren Geschlechtzahl sich in der Form $12s^2 - 7s + 1$ mit $s \in \mathbb{N}$ darstellen läßt.

Eine kurze Rechnung ergibt, daß für alle p' , die kleiner als $12s^2 - 5s + 1$ sind, die Zahl $H(p')$ gleich $12s$ ist.

$$H(12s^2 - 5s) = \left\lceil \frac{7 + \sqrt{1 + 48 \cdot 12s^2 - 48 \cdot 5s}}{2} \right\rceil$$

$$\frac{7 + \sqrt{24 \cdot 12s^2 - 2 \cdot 24 \cdot 5s + 1}}{2} < \frac{7 + \sqrt{24 \cdot 12s^2 - 2 \cdot 24 \cdot 5s + 25}}{2} = 12s + 1$$

$$\Rightarrow H(12s^2 - 5s) < 12s + 1$$

$H(p')$, $v_{p'}$ und $\chi_{p'}$ steigen monoton mit p' . Folglich ist

$$12s \leq v_{p'} \leq \chi_{p'} \leq H(p') = 12s$$

und daher $\chi_{p'} = H(p')$.

Gleichung (8) ist also gültig für

$$12s^2 - 7s + 1 \leq p' \leq 12s^2 - 5s \quad \text{mit } s \in \mathbb{N}.$$

Beispielsweise gilt sie für $p' = 6$ und 7 ($s=1$), $p' = 35, \dots, 38$ ($s=2$) und $p' = 88, \dots, 93$ ($s=3$).

L I T E R A T U R V E R Z E I C H N I S

- 11 C.M. Terry The genus of K_n , $n = 12(2^m)$
 L.R. Welch Bull. Amer. Math. Soc., 71,
 J.W.T. Youngs S. 653 - 656, 1965

- 12 C.M. Terry The genus of K_n , $n = 12s$
 L.R. Welch Bull. Amer. Math. Soc., 71,
 J.W.T. Youngs S. 657 - 660, 1965

- 13 C.M. Terry The Genus of K_{12s}
 L.R. Welch Journal of Combinatorial Theory, 2,
 J.W.T. Youngs S. 43 - 60, 1967

- 14 J.W.T. Youngs Minimal Imbeddings and the Genus of a
 Graph
 J. Math. Mech., 12 , S. 303 - 315, 1963

- 15 J.W.T. Youngs The Heawood Map Coloring Conjecture
 in Graph Theory and Theoretical Physics
 Academic Press, London, New York, 1967

Herr Professor Dr. Gerhard Ringel machte mich zuerst auf die interessanten Probleme der Graphentheorie aufmerksam. Unter seiner Anleitung entstand die vorliegende Arbeit. Sie wurde in Berlin an der Freien Universität begonnen und in Berkeley und Santa Cruz an der Universität von Kalifornien beendet.

Ich danke Herrn Professor Ringel für sein förderndes Interesse und wertvolle Diskussionen.

Lebenslauf

Am 29.11.1944 wurde ich in Prag als Tochter des Industriekaufmanns Karl-August Thalacker und seiner Ehefrau Maria, geb. Heck, geboren und bin seit Mai 1945 in Berlin wohnhaft.

Am 1.9.1950 wurde ich in die Grundschule, am 1.4.1956 in die Oberschule (4. O.W.Z. in Berlin-Wilmersdorf) aufgenommen. Nach dem Abitur im Frühjahr 1963 begann mein Studium der Mathematik, Physik, Pädagogik und Philosophie an der Freien Universität Berlin, wo ich im Mai 1965 das Vordiplom in Mathematik bestand. Im Sommersemester 1966 studierte ich an der Universität in Münster.

Die Erste Staatsprüfung für das Amt des Studienrats legte ich am 23.4.1968, die Zweite am 17.12.1969 in Berlin ab.

Seit März 1969 bin ich mit Herrn Heinz-Eberhard Mahnke verheiratet.

Am 14.11.1941 wurde ich in Berlin als Tochter des Ingenieurs
Karl-August Thiele und seiner Ehefrau Marie, geb. Thiele,
und ein Jahr 1942 in Berlin geboren.
Am 1.6.1950 wurde ich in die Volksschule, am 1.9.1955 in die
Mittelschule (M.M.S. in Wilmersdorf) aufgenommen. Nach dem Ab-
schluß der Mittelschule (1961) begann ich Studium der Mathematik, Physik,
Biologie und Philosophie an der Freien Universität Berlin, wo ich
im Mai 1967 das Studium in Mathematik beendete. In Zusammenarbeit
mit dem Institut für Mathematik in Berlin.
1968 wurde ich an der Universität in Münster.
Die erste Dissertation für den Grad eines Doktors wurde im Jahr
1971, die zweite im Jahr 1972 in Berlin ab.
Seit dem Jahr 1969 bin ich mit dem Herrn Hans-Joachim Thiele verheiratet.

